الرياضيات

8

التحليل (5)

17

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

تحدثنا بالمحاضرة السابقة عن القياس وخواصه وقياس الخارج وفي هذه المحاضرة سنتحدث عن حبر بوريل وتكامل لوبيغ

جبر بوريل:

لتكن $X = \mathbb{R}$ ولتكن τ التبولوجيا المؤلوفة:

$$\tau = \{A;\ A \subseteq \mathbb{R}, \forall x \in A : \exists a, b \in \mathbb{R}; x \in]a, b[\subseteq \mathbb{R}\}$$

(أي A تكون كل نقاطها داخلية (كل نقطة تقع ضمن مجال مفتوح محتوى في المجموعة A)

إذاً τ هو صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ويشكل التوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.)

إن أصغر جبر تام مولد بالتوبولوجيا المألوفة يدعى جبر بوريل $B(\mathbb{R})$

قياس لوبيغ

هو تابع معرف على جبر بوريل بالشكل التالي:

$$\mu : B(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

يحقق

$1)\mu(\emptyset) = 0$

$2)\ \forall I_i \in B(X) i, j \in \mathbb{N}\,, i \neq j\,;\ I_i \cap I_j = \emptyset$

$$\Rightarrow\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$$

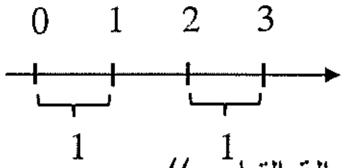
بحيث:

I من الشكل: $[a, b]\ ,\ [a, b[\ ,\ ]a, b]\ ,\ ]a, b[$

$$\mu(I) = b - a$$

((أي أن قياس مجال ما هو طوله، وفي الحقيقة إن تعريفنا لقياس على جبر ما مثل $B(\mathbb{R})$ يعني أننا عرفنا طول المجموعات فيه. مثلاً: لدينا $[0,1] \cap [2,3] = \phi$ ومنه:

$$\mu([0,1] \cup [2,3]) = \mu[0,1] + \mu[2,3] = 1 - 0 + 3 - 2 = 2$$



إذاً قياس أو طول المجموعة $[0,1] \cup [2,3]$ هو 2.

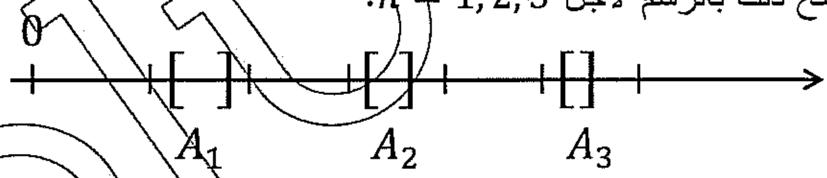
وأي مجموعة في جبر بوريل نستطيع حساب قياسها باستخدام خواص دالة القياس.))

مثال: احسب قياس المجموعة:

$A \subseteq \mathbb{R}$ حيث:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}] = \underbrace{\left[1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}\right]}_{n=1} \bigcup \underbrace{\left[2 + \frac{1}{16}, 2 + \frac{1}{4}\right]}_{n=2} \bigcup \ldots$$

وضح ذلك بالرسم لأجل $n = 1, 2, 3$.



نلاحظ أن كل A_i عبارة عن مجال مغلق

$$A_1 = \left[1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$A_2 = \left[2 + \frac{1}{16}, 2 + \frac{1}{4}\right]$$

$$A_3 = \left[3 + \frac{1}{64}, 3 + \frac{1}{8}\right]$$

المجموعات منفصلة مثنى مثنى إذاً قياس الاجتماع يساوي مجموع القياسات:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu[n + 4^{-n}, n + 2^{-n}] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n + \frac{1}{2^n}\right) - \left(n + \frac{1}{4^n}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ملاحظة: كل مجموعة ضمن جبر بوريل تسمى مجموعة بوريلية وهذه المجموعات قابلة للقياس حسب قياس لوبيغ

التوابع القيوسة:

ليكن فضائي القياس: $(X, \mathcal{A}, \mu_1)\,, (Y, \mathcal{B}, \mu_2)$

وليكن التابع $f: X \to Y$ أو $f: (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$

نقول عن f أنه تابع قيوس إذا كانت الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في الفضاء Y هي مجموعة قيوسة في الفضاء الأول X:

$$\forall\, B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) = A \in \mathcal{A}$$

التابع القيوس (الدرجي) المميز:

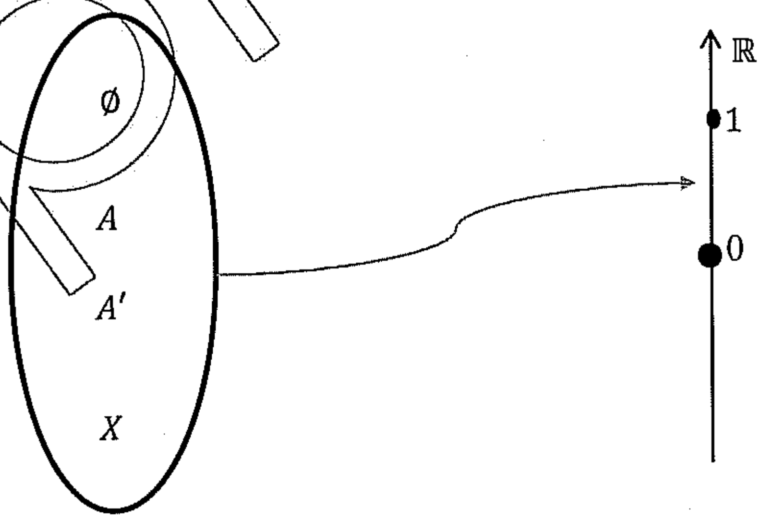
لتكن $\emptyset \neq X \supseteq A$ نعرّف: (الرمز χ يُلفظ كابا)

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

$$\forall x \in X$$

أي ان المنطلق عبارة عن أربع مجموعات $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A', X\}$

والمستقر عبارة عن $\mathbb{R}$(جبر بوريل في الأعداد الحقيقية) بأخذ القميتين 1,0



خواص التابع الدرجي المميز:

1) $\chi_X(x) = 1$

2) $\chi_\phi(x) = 0$

$$3)\ \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\ .\ \chi_B(x)$$

الإثبات: إذا كان $x \in A \cap B$ بالتالي $x \in B, x \in A$ ويكون:

$$1 = \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\,.\,\chi_B(x) = 1\,.\,1 = 1$$

في حال $x \notin A \cap B$ فإمّا $x \notin A$ أو $x \notin B$

ويكون: $0 = \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\ .\ \chi_B(x) = 0$

$$4)\qquad \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)\ \ ; A \cap B = \phi$$

الاثبات: نميز حالتين

a) $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$ أو $x \in A$

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$$

$$1 = 1 + 0$$

أو $1 = 0 + 1$

b) $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ و $x \notin B$

$$0 = 0 + 0$$

$$5)\qquad A \subseteq B \Rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)\ \forall x \in X$$

الاثبات: نميز حالتين

$a)\ x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow 1 \leq 1$

$$b) x \notin A \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x \in B \Rightarrow 0 \leq 1 \\ \text{أو } x \notin B \Rightarrow 0 \leq 0 \end{cases}$$

$$6)\qquad \chi_{A\backslash B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

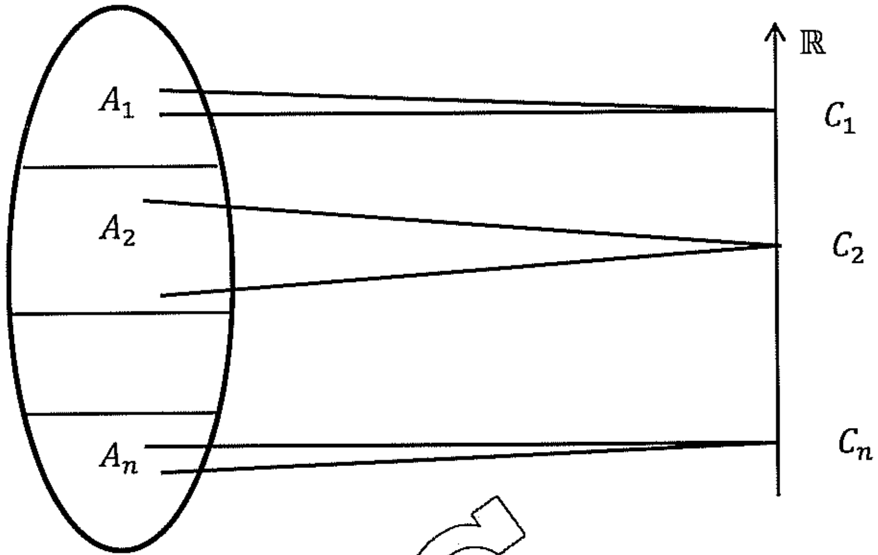
$$7)\qquad \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

$$8)\qquad \chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_{A\cap B}(x)$$

التابع البسيط: (هو تعميم للتابع المميز)

نقول عن f أنه تابع بسيط اذا كانت مجموعة قيمه منتهية.

$$f: X \to \{C_1, C_2, \dots, C_n\} \subseteq \mathbb{R}$$



مبرهنة:

كل تابع بسيط يمكن أن يكتب كتركيب خطي بدلالة توابع درجية (مميزة).

$$f; X \to \{C_1, \dots, C_n\}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \ \underbrace{\chi_{Ai}(x)}_{\text{توابع درجية}} = C_1\chi_{A_1}(x) + C_2\,\chi_{A_2}(x) + \cdots + C_n\,\chi_{A_n}(x)$$

وإن A_i تشكل تجزئة لـــ X:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

$$A_i \cap A_j = \phi \ ; i \neq j$$

كيف نعيّن المجموعات A_i؟؟ الجواب كمايلي:

$$A_i = \{x \in X \ ; \ f(x) = C_i\} = f^{-1}(\{C_i\})$$

مثال:

اكتب التابع f كتركيب خطي بدلالة توابع درجية.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \ ; x \in [0,3[= A_1 \\ 3 \ ; x \in [3,6[= A_2 \\ 7 \ ; x \in [6,7] = A_3 \end{cases}$$

الحل:

$$f(x) = 2\chi_{A_1}(x) + 3\,\chi_{A_2}(x) + 7\,\chi_{A_3}(x)$$

ملاحظة: كمثال عددي للتأثير اذا أخذنا $A_1 \ni x \Leftarrow x = 1$

فيصبح التابع:

$$f(1) = 2 \times 1 + 0 + 0 = 2$$
$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 0 + 3\,\times 1 + 0 = 3$$

نتيجة:

كل تابع بسيط هو تابع قيوس

ملاحظة: قيم التابع البسط عبارة عن مجموعة منتهية بمعنى أن المنطلق عبارة عن مجموعات منفصلة مثنى مثنى أي كل عنصر من المنطلق يأخذ صورة واحدة

تكامل لوبيغ:

μ قياس لوبيغ

اذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً قيوساً. وكان f تابع بسيط مجموعة قيمه C_i

نعرّف تكامل لوبيغ للتابع f البسيط على X بالنسبة للقياس μ بالشكل التالي:

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} C_i\, \mu(A_i)$$

حيث: $\{C_i\}$ مجموعة قيم التابع البسيط f

A_i تشكل تجزئة لـــ X حيث : $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$A_i \cap A_j = \phi \quad ; i \neq j$$

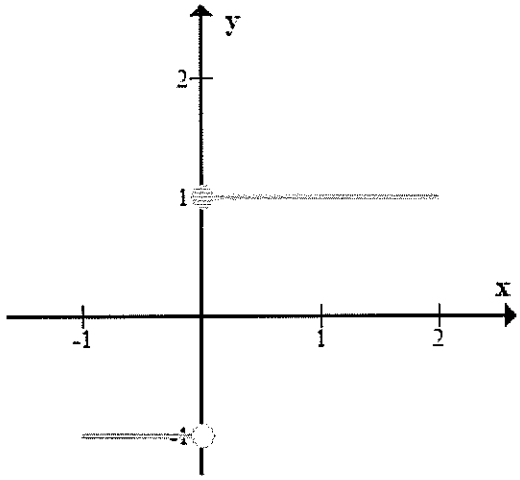
$$A_i = \{x \in X : f(x) = C_i\}$$

تمرين1: احسب تكامل لوبيغ للتابع

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_{[-1,2]} f\, d\mu$$

الحل:



لنأخذ تجزئة المجموعة:

$$A_1 = [-1,0[$$

$$A_2 = [0,2]$$

بحث $A_1 \cap A_2 = \emptyset \ , \ A_1 \cup A_2 = [-1,2]$

وعندها يكون تكامل لوبيغ للتابع بالشكل:

$$\int_{[-1,2]} f \, d\mu = -1\mu(A_1) + 1\mu(A_2) = -1 \times 1 + 1 \times 2 = 1$$

تمارين: احسب التكاملات التالية:

$$\int_{[-3,3]} sign\,(\cos \pi x)\ d\mu \quad ; sign\,(\omega) = \begin{cases} -1 \ ; \omega < 0 \\ 0 \ ; \omega = 0 \\ 1 \ ; \omega > 0 \end{cases}$$

$$\int_{[0,3]} g \, d\mu \quad , \quad g(x) = 3[x] + 1$$

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu \quad , \quad f(x) = \begin{cases} -1 \ ; x \notin \mathbb{Q} \\ \ \ 1 \ ; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ملاحظة: سيقوم الدكتور التمارين بالمحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.